Conteúdos:

Estudo da reta

Colinearidade de três pontos

Retas perpendiculares e retas paralelas

Equação cartesiana de uma Circunferência

Equação cartesiana de uma esfera

Interseção de uma reta com uma circunferência

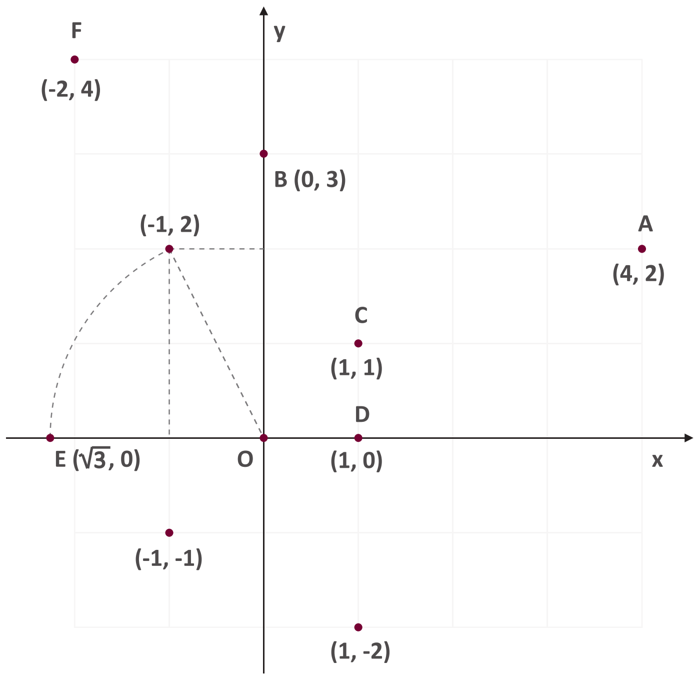
Questões de linguagem

No referencial ortonormado (O, (i , j)), da figura um ponto P de coordenadas (x, y) tem de abcissa x e ordenada y.

Reta e circunferência

Estudo da reta

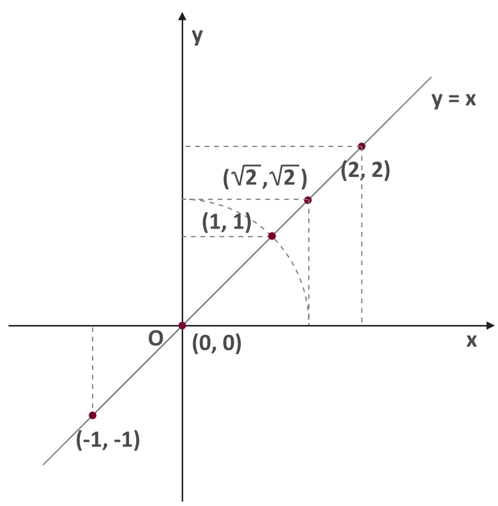
Na figura está desenhado um referencial o.m. (O, ($\vec{i}$, $\vec{j}$)) onde estão representados vários pontos.



A correspondência existente entre os pontos do plano e os elementos de $\mathbb{R}^2$ permite dizer que ao ponto A corresponde (4, 2). Será pois natural associar a letra que designa o ponto ao par de coordenadas que o identifica. Assim teremos, por exemplo,

A (4, 2), B (0, 3), C (1, 1), D (1, 0), E ($-\sqrt{5}$, 0), F (-2, 4), G (-1, -1) e H (1, -2).

Podemos fixar relações entre os elementos de $\mathbb{R}^2$. Por exemplo, a relação y = x refere-se aos pontos do plano cuja ordenada é igual à abcissa, isto é, os pontos pertencem a uma reta que passa pela origem do referencial.



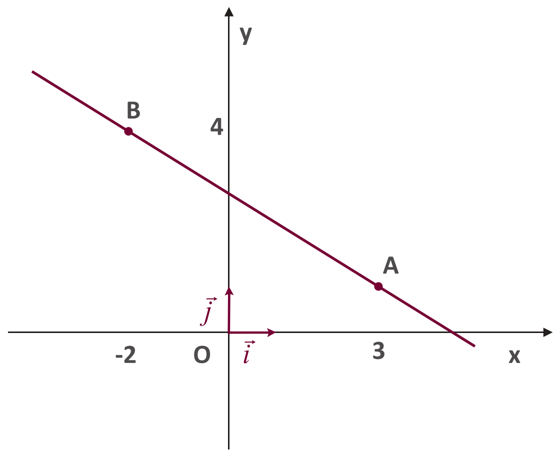
No plano, uma reta r pode ser definida por dois pontos ou por um ponto e um vetor director ou um ponto e um vetor normal à reta.

Vamos, de seguida, procurar uma relação a que devem satisfazer os pontos da reta r; a relação obtida é a equação da reta r.

1º Caso

Reta definida por dois pontos

Determina, analiticamente, a reta que passa pelos pontos A (3, 1) e B (-2,4).



Designemos por P um ponto genérico da reta s e seja (x, y) as coordenadas de P. Dizer que P pertence a s é o mesmo que afirmar que $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{AB}$ são colineares

$\overrightarrow{AB}$ = B – A = (-2, 4) – (3, 1) = (-2 -3, 4 – 1) = (-5, 3)

$\overrightarrow{AP}$ = P – A = (x, y) – (3, 1) = (x – 3, y – 1)

O que significa que

$$\begin{vmatrix} x-3 & -5 \\ y-1 & 3 \end{vmatrix} = 0, \text{ pois}$$

Obtemos,

3(x – 3) + 5(y – 1) = 0

O que significa

3x -9 + 5y -5 = 0

simplificando

3x + 5y -14 = 0

Exemplo

Define a reta que passa pelos pontos A (-2,-1) e C (0, 6)

Designemos por P (x, y) um ponto genérico da reta.

Podemos escrever que $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{AC}$ são colineares. O que significa que

$$\begin{vmatrix} x+2 & 2 \\ y+1 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

Obtemos, 7(x + 2) -2(y + 1) = 0

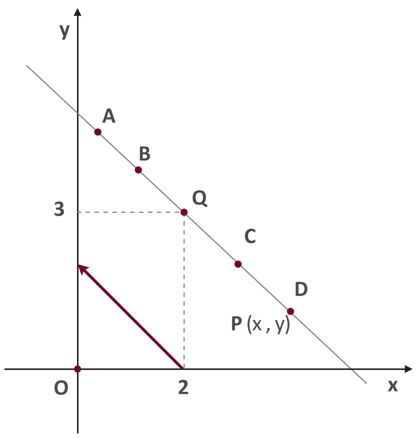
O que significa 7x +14 - 2y - 2 = 0

Simplificando, 7x -2y + 12 = 0

TAREFA 12

a) Escreve a equação da reta que passa pelo ponto (3, 4) e é paralela à reta 5x – 2y = 3.

b) Escreve a equação da reta que passa pelo ponto (2, 4) e é perpendicular à reta 2x + 3y = 5.



Exemplo

Escreve a equação da reta que passa pelo ponto A (3, 4) e é paralela à reta 5x - 2y = 3.

Um vetor diretor da reta 5x – 2y = 3 é o vetor $\vec{r}$ (2, 5)

Para um ponto P (x, y)qualquer da reta temos que

$\overrightarrow{AP}$ é colinear com $\vec{r}$, o que significa

$$\begin{vmatrix} x-3 & 2 \\ y-4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

5 (x – 3) - 2 (y – 4) = 0

5x – 15 - 2y + 8 = 0

5x – 2y = 7

Exemplo

Escreve uma reta que passa pelo ponto B (2, 4) e é perpendicular à reta 2x + 3y = 5

Vamos representar graficamente a reta de equação 2x + 3 y = 5

O vetor $\vec{u}$ (-3, 2) é vetor diretor da reta e é vetor normal à reta pedida.

Sendo P (X, Y) um ponto genérico da reta pedida, temos que

$\overrightarrow{BP}$ = (x – 2, y – 4) é perpendicular a $\vec{u}$. Então, utilizando a perpendicularidade de vetores, temos

-3(x -2) + 2(y – 4) = 0

-3x + 6 + 2y -8 = 0

-3x + 2y = 2

2º Caso

Reta definida por um ponto e por um vetor diretor

Determinar analiticamente a reta r que passa por Q (2, 3) e tem a direção de $\vec{r}$ (-2, 2).

Observando a figura ao lado temos que os pontos A, B, C, D, estão todos sobre r.

Podemos escrever

A = Q + K r , com K ∈ ℝ, ou seja $\overrightarrow{AQ}$ é colinear com $\vec{r}$

B = Q + K r , com K ∈ ℝ, ou seja $\overrightarrow{BQ}$ é colinear com $\vec{r}$

Para um ponto P (x , y) qualquer da reta r temos que

$\overrightarrow{QP}$ é colinear com $\vec{r}$, o que significa

$$\begin{vmatrix} x-2 & -2 \\ y-3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Donde, (x - 2) 2 – (y - 3)(-2) =0

2x – 4 + 2y - 6 =0

2x + 2y – 10 = 0

Simplificando (dividindo por 2)

x + y - 5 = 0

Ou seja,

Y = -x + 5 (**Equação reduzida** da reta r)

3º Caso

Reta definida por um ponto e por um vetor normal

Considera um ponto (x , y) qualquer da reta t.

Neste caso o vetor $\overrightarrow{AP}$ = P – A = (x, y) – (3, 1) = (x – 3, y – 1) é perpendicular ao vetor $\vec{v}$.

Então, utilizando a condição de perpendicularidade de vetores, temos

2 (x – 3) + 1 (y – 1) = 0

2x -6 + y – 1 = 0

Simplificando,

2x + y -7 = 0 (equação geral da reta t)

Retas paralelas aos eixos coordenados

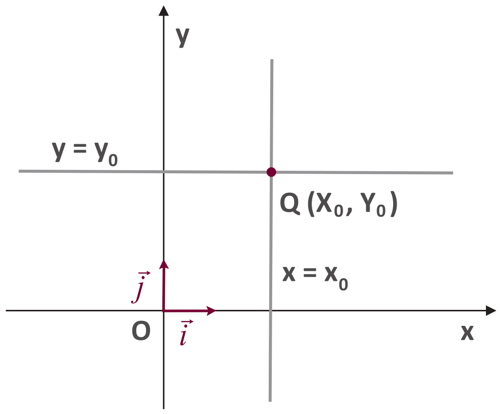
Se uma reta é paralela a Ox, os seus pontos terão todos a mesma ordenada, sendo essa a condição que os caracteriza.

Por exemplo, $y = 3$, representa uma reta paralela ao eixo Ox. Alguns pontos que pertencem a essa reta são, (1, 3), (-2, 3), (0, 3), (1,5; 3), etc.

Se uma reta é paralela a Oy, os seus pontos terão todos a mesma abcissa, sendo essa a condição que os caracteriza.

Por exemplo, $x = 4$, caracteriza uma reta paralela a Oy. Alguns pontos que pertencem a essa reta são, (4,1), (4, 0), (4, -1), etc.

Em geral,



TAREFA 13

Representa graficamente as retas definidas por:

a) $y = -\frac{1}{2}$

b) $x = \frac{7}{4}$

c) $x + 4 = 0$

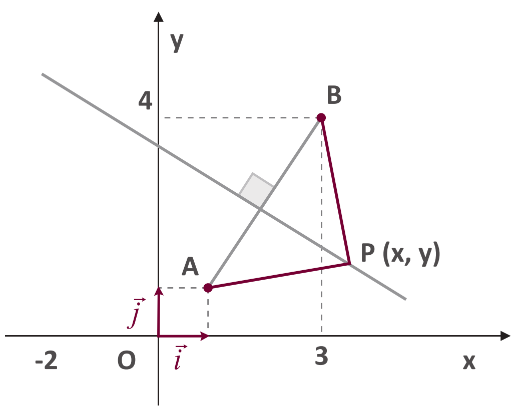
d) $2y + 4 = 0$

Mediatriz de um segmento de reta

Dados dois pontos A (1, 1) e B (3, 4) chama-se mediatriz do segmento de reta [AB] ao conjunto dos pontos do plano que distam igualmente de A e de B, pontos extremos do segmento. Como se sabe, esse conjunto de pontos é a reta perpendicular ao segmento [AB] e que passa pelo seu ponto médio.

Sendo P (x, y) um ponto genérico da mediatriz, verifica-se sempre que

$$\left\|\overrightarrow{AP}\right\| = \left\|\overrightarrow{BP}\right\|$$



TAREFA 14

Determina as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto Q (2, 3) e tem a direção do vetor $\vec{r}$ (-2, 2).

$$\|\overrightarrow{AP}\| = \|\overrightarrow{BP}\|$$

logo

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}$$

$$(x-1)^2+(y-1)^2 = (x-3)^2+(y-4)^2$$

Ou seja

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16$$

$$\cancel{x^2} - 2x + 1 + \cancel{y^2} - 2y + 1 = \cancel{x^2} - 6x + 9 + \cancel{y^2} - 8y + 16$$

E, simplificando, $4x + 6y - 23 = 0$ (Equação da Mediatriz de [AB].

TAREFA 15

Determina as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto B (-1, 2, 4) e tem vetor diretor (1,-2, 1).

Equações paramétricas de uma reta no plano

Já vimos que uma reta pode ser definida por um ponto e um vetor diretor (não nulo).

Consideremos uma reta r que passa por Q (1, 2) e tem vetor diretor $\vec{u}$ (2, 2).

Qualquer ponto P (x, y) da reta r satisfaz a relação:

$\overrightarrow{AP} = k\,\vec{u}$, com k pertencente a $\mathbb{R}$, (Porquê)

Então, através das coordenadas, podemos escrever

$\overrightarrow{AP} = k\,\vec{u}$, com k pertencente a $\mathbb{R}$

Donde sai,

$(x, y) = (a, b) + k\,(p,q)$, com k pertencente a $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = a + 2p \\ y = b + 2q \end{cases} \quad \text{(Equações Paramétricas da reta s)}$$

Equações paramétricas de uma reta no espaço

Tal como no plano, no espaço, uma reta pode ser definida por dois pontos ou por um ponto e um vetor diretor.

Determinemos as equações paramétricas de uma reta d a passar por um ponto A e com vetor diretor não nulo $\vec{u}$.

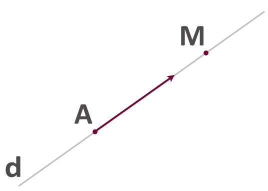
Um ponto M pertence à reta d se e só se $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$ e através de coordenadas A (a, b, c); M (x, y, z) e $\vec{u}$ = (m, n, p), temos:

$$\begin{cases} x = a + km \\ y = b + kn \\ z = c + kp \end{cases}$$

Sendo k um número real qualquer.

Estas equações constituem uma representação paramétrica da reta d.

A cada valor de k corresponde um ponto M e um só e inversamente, ou seja, a cada ponto M corresponde um e um só valor de k.



Exemplo

As equações,

$$\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 8k \\ z = -4 - 6k \end{cases}$$

são as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto A (1, 0, -4) e tem vetor diretor (2, 8, -6).

Exemplo

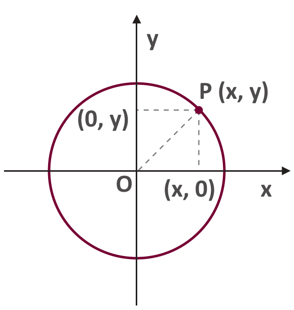
Determina as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto Q (2, 3) e tem a direção do vetor $\vec{r}$ (-2, 2)

(x, y) = (2, 3) + k (-2, 2)

$$\begin{cases} x = 2 - 2k \\ y = 3 + 2k \end{cases}, \text{ com } k \in \mathbb{R}$$

Circunferência

A figura seguinte representa uma circunferência de centro na origem das coordenadas e raio 1.



Recorda

Num plano, circunferência de centro C e raio r é o conjunto de todos os pontos cuja distância a C é r.

Sendo A (x_1, y_1) e B (x_2, y_2) , então a distância entre A e B será,

$$d(A,B) = \left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

TAREFA 16

Determinna a equação cartesiana da circunferência de centro C(0,0) e raio 5.

TAREFA 17

Determina a equação cartesiana das circunferências com:

a) Centro C (-3, -1) e raio 1;

b) Centro C (0,2) e raio 2.

Para que o ponto P (x, y) pertença a esta circunferência tem que satisfazer a condição: a distância dele à origem é igual a 1.

Atendendo à definição de distância entre dois pontos, teremos que calcular a distância entre P (x, y) e O (0, 0), ou seja

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$$

Teremos

$$\sqrt{x^2+y^2} = 1$$

Donde

$$x^2+y^2 = 1$$

Esta condição carateriza a circunferência desenhada.

Vamos agora determinar a equação cartesiana de uma circunferência de centro (-2, 1) e raio 3.

Para que o ponto P (x, y) pertença a esta circunferência a distância dele ao ponto C, centro da circunferência, terá que ser igual a 3.

Atendendo à definição de distância entre dois pontos, teremos

$$d(P,C) = \sqrt{(x-(-2))^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}$$

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2} = 3$$

$$(x+2)^2+(y-1)^2 = 3^2$$

$$(x+2)^2+(y-1)^2 = 9$$

Esta relação é a equação cartesiana da circunferência de centro C (-2, 1) e raio 3.

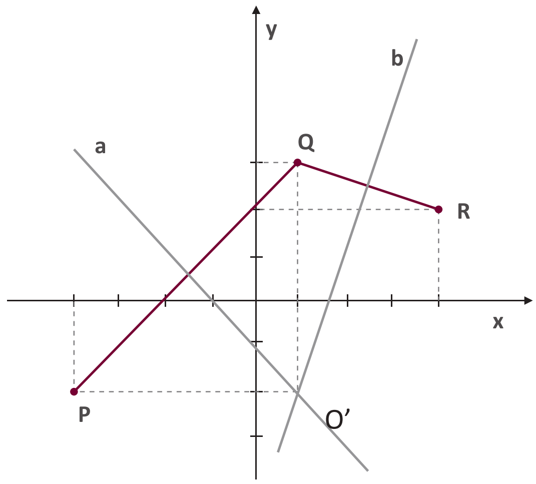
Em síntese, ao conjunto de todos os pontos P, equidistantes de C, chama-se circunferência de centro C e raio r , que tem como equação cartesiana:

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$$

Exemplo

Determinar a equação da circunferência que passa pelos pontos P (-4, -2), Q (1, 3) e R (4, 2).

O centro O´da circunferência pode obter-se por interseção das mediatrizes dos dois segmentos definidos pelos pontos P, Q e R.



Determinação da mediatriz de [PQ]

$$\sqrt{(x+4)^2+(y+2)^2} = \sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}$$

Donde resulta, $x + y = -1$

A mediatriz de [QR]

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}$$

Donde resulta, $3x – y = 5$

O ponto O´é o ponto de interseção destas duas mediatrizes ou seja, a solução do sistema

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

O´(1, -2)

A determinação do raio pode fazer-se, calculando a distância entre O´e qualquer um dos outros pontos P, Q ou R.

Exemplo:

Exercício resolvido nº 5

Determina a equação da mediatriz do segmento de reta cujos extremos são, A (-3, 2),B (2, -3)

Seja P (x, y) um ponto genérico da mediatriz. Verifica-se que

$$\|\overrightarrow{AP}\| = \|\overrightarrow{BP}\|$$

$$\sqrt{(x+3)^2+(x-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2+(x+3)^2}$$

$$(x+1)^2+(x-2)^2 = (x-2)^2+(x+3)^2$$

Efetuando os cálculos e simplificando temos que y = x é a mediatriz de [AB].

Círculo

Qual o significado que devemos atribuir à seguinte condição?

$$x^2 + y^2 \leqslant 4$$

Sabemos que a equação

(1) $x^2 + y^2 = 4$

Representa uma circunferência de centro (0, 0) e raio 2, isto é, o conjunto de todos os pontos que distam exactamente 2 do ponto O.

(2) E, $x^2 + y^2 < 4$ representa o conjunto de pontos cuja distância à origem é menor que 2

TAREFA 18

Substituindo x e y pelas coordenadas de P (1, 1) obtém-se a proposição verdadeira

$$1^2 + 1^2 \leq 4$$

Assim, o ponto P (1, 1) é uma das soluções da inequação $x^2 + y^2 \leqslant 4$

Representa geometricamente a região do plano correspondente a:

$$x^2 + y^2 \leq 9$$

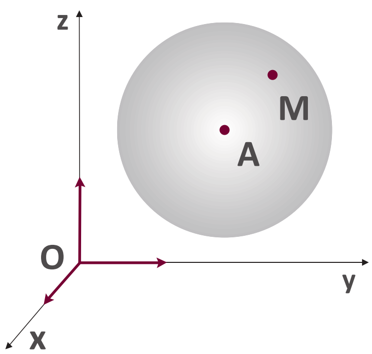
TAREFA 19

Escreve a equação cartesiana da esfera com centro em (1, 2, 1) e raio 2.

Comparando as expressões (1) e (2) induz-se que a condição

$$x^2 + y^2 \leqslant 4$$

Representa o conjunto de pontos do plano cuja distância ao ponto O é igual ou inferior a 2, representa o círculo de centro O e raio 2.



Esfera

Seja S uma esfera de centro A (a, b, c) e de raio r. O ponto P (x, y, z) pertence à esfera se e só se $\|\overrightarrow{AP}\| \leqslant r$

O que se traduz por,

$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \leqslant r^2$, Equação cartesiana de uma esfera.

Exemplo

Vamos escrever a equação de esfera de centro na origem do referencial e raio 3.

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 9$$

Nota

A determinação do pé da perpendicular traçada do ponto para a reta consiste na procura do ponto de interseção de duas retas, a reta dada e a perpendicular a esta, passando pelo ponto dado.

A distância de um ponto P a uma reta r é , por definição, o comprimento do segmento que une o ponto com o pé da perpendicular traçada por P para r.

Poderás determinar essa distância seguindo os passos:

1. Determinar o pé da perpendicular traçado por P para r;

2. Determinar a distância entre dois pontos, P e o pé daperpendicular.

Exemplo: Pé da perpendicular

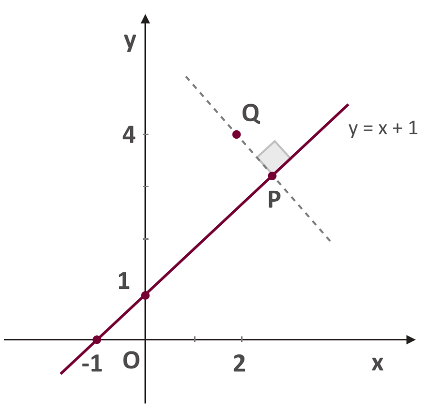
Determina o pé da perpendicular traçada por Q (2, 4) para a reta r de equação y = x + 1

Um vetor diretor da reta dada é (1, 1).

Neste caso o vetor $\overrightarrow{QP} = P - Q = (x, y) - (2, 4) = (x - 2, y - 4)$ é perpendicular ao vetor (1, 1) (sendo P um ponto genérico da reta perpendicular à reta dada). Então, utilizando a condição de perpendicularidade de vectotes, temos

$1\,(x - 2) + 1\,(y - 4) = 0$

$x - 2 + y - 4 = 0$



Simplificando,

$x + y - 6 = 0$

Para determinar o pé da perpendicular há que determinar o ponto de interseção das retas y = x + 1 e x + y -4= 0.

Resolvendo o sistema temos que o pé da perpendicular traçado de Q para a reta r é $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$.